ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC TÙNG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC TÙNG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. ĐINH NHO HÀO

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời mở đầu

Phương trình Laplace do nhà toán học người Pháp Pierre-Simon Laplace (23 tháng 3 1749 – 5 tháng 3 1827) đưa ra có ứng dụng rất nhiều trong thực tế. Ngoài ra, Laplace còn là một nhà thiên văn học đã có công xây dựng nền tảng của ngành thiên văn học bằng cách tóm tắt và mở rộng các công trình nghiên cứu của những người đi trước trong cuốn sách 5 tập với tựa đề Mécanique Céleste (Cơ học Thiên thể) (1799-1825). Cuốn sách này đã chuyển đổi các nghiên cứu về cơ học cổ điển mang tính hình học bởi Isaac Newton thành một nghiên cứu dựa trên vi tích phân, được biết đến như là cơ học (vật lý).

Ông cũng là người đầu tiên đưa ra phương trình Laplace. Biến đổi Laplace xuất hiện trong tất cả các ngành toán lý — một ngành mà ông là một trong những người sáng lập. Toán tử Laplace, được sử dụng nhiều trong toán học ứng dụng, được đặt theo tên ông.

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ trình bày về xuất xứ cũng như một số tính chất cơ bản của phương trình Laplace. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Phương trình Laplace và xuất xứ của phương trình Laplace

Chương này sẽ giới thiệu về phương trình Laplace và một số mô hình vật lý của phương trình Laplace.

Chương 2: Nghiệm của phương trình Laplace Chương đưa ra một số tính chất cơ bản của phương trình Laplace như điều kiện Cauchy-Riemann, tính giải tích của nghiệm, điều kiện cần và đủ để nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình Laplace có nghiệm.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Đinh Nho Hào. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu. Đồng thời tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K8B (khóa 2014-2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Tác giả

Nguyễn Đức Tùng

Chương 1

Phương trình Laplace và xuất xứ của phương trình Laplace

Phương trình Laplace là một phương trình đạo hàm riêng được đặt theo tên của nhà toán học người Pháp Pierre-Simon DeLaplace (1749-1827). Ông là người đầu tiên đưa ra phương trình Laplace. Chương này sẽ giới thiệu về xuất xứ và ý nghĩa vật lý phương trình Laplace.

1.1 Phương trình đạo hàm riêng Laplace

Định nghĩa 1.1.1. Trong không gian n chiều, cho u là một hàm thực khả vi 2 lần. Phương trình Laplace là phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0. \tag{1.1}$$

Khi vế phải không thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad f \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

thì phương trình đó được gọi là phương trình Poisson.
Ta thường gặp phương trình Laplace trong không gian 3 chiều ở các hệ tọa độ khác nhau như sau:

(i) Trong hệ tọa độ **Descartes**: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

(ii) Trong hệ tọa độ trụ: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

(iii) Trong hệ tọa độ cầu: $\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2 sin^2\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) +$ $\dfrac{1}{\rho^2 sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$

Nghiệm của phương trình Laplace là một hàm điều hòa.

1.2 Xuất xứ của phương trình Laplace

1.2.1 Ba định luật của Keple

Như chúng ta đã biết, Tycho Brahe (1546-1601) là nhà thiên văn học người Đan Mạch , người đã quan sát bầu trời không qua kính viễn vọng trong vòng khoảng 20 năm và ông đã để lại nhưng dữ liêu quan trọng. Từ những dữ liệu đó, nhà thiên văn học người Đức Jahannes Keple đã nghiên cứu và đưa ra ba quy luật sau:

(i) Mọi hành tinh đều chuyển động theo quy đạo là một hình eliptic và Mặt Trời là một tiêu điểm.

(ii) Đoạn thẳng nối mặt trời với một hành tinh bất kì quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian như nhau.

(iii) Tỉ số giữa lập phương trục lớn và bình phương chu kì quay là giống nhau với mọi hành tinh.(tỉ số đó là một hằng số).

Các quy luật trên tuy đẹp nhưng khá phức tạp. Sau này , Newton tìm ra một biểu thức đơn giản hơn cho những quy luật này. Đó là định luật vận vật hấp dẫn : "lực hấp dẫn giữa hai vật bất kì tỉ lệ thuận với khối lượng của chúng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.

Thay vì xét lực hút của một vật có khối lượng đơn vị đến vật khác, ta xét thế năng của lực hấp dẫn được khảo sát bằng phương trình sau

$$u = \gamma \frac{M}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}} \tag{1.3}$$

với γ là hằng số, $(x_o; y_o; z_o)$ là tọa độ của vật hút, M là khối lượng.

Các lực hút thành phần F_x, F_y, F_z tác dụng vào các vật có khối lượng đơn vị đặt tại điểm (x, y, z) xác định như sau : $\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$.

Trường hấp dẫn u được xác định bởi véc tơ $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$.

Trong trường hợp lực hấp dẫn của hệ chất điểm (tâm khối lượng M_i đặt tại điểm có tọa độ $(x_i; y_i; z_i)$) thì lực hút tính theo công thức:

$$u = \gamma \sum_i \frac{M}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \tag{1.4}$$

Laplace đã đề xuất rằng để nghiên cứu lực hấp dẫn ta không sử dụng chính hàm u mà từ các phương trình vi phân mà hàm đó thỏa mãn.

1.2.2 Xây dựng phương trình đạo hàm riêng Laplace

Trước tiên ta khảo sát một thành phần trong công thức (1.4). Ta tính đạo hàm của nó. Ta kí hiệu khoảng cách giữa hai điểm $(x; y; z)$ và $(x_i; y_i; z_i)$ là $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ và lấy đạo hàm riêng theo biến x của hàm r ta được:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} = \frac{x - x_i}{r}. \tag{1.5}$$

Tương tự ta được: $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y - y_i}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z - z_i}{r}$.
Từ đó ta được các đạo hàm sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = -\gamma M_i \dfrac{\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = -\gamma M_i \dfrac{x - x_i}{r^3} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial y} = -\gamma M_i \dfrac{y - y_i}{r^3} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\gamma M_i \dfrac{z - z_i}{r^3} \end{cases}. \tag{1.6}$$

Lấy đạo hàm lần nữa ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = -\gamma M_i \left(\frac{r^3 - (x - x_i) \frac{\partial r^3}{\partial x}}{r^6} \right) = \gamma M_i \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_i)^2}{r^5} \right).$$

Tương tự ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \gamma M_i \left(-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3(y - y_i)^2}{r^5} \right) \\ \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \gamma M_i \left(-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3(z - z_i)^2}{r^5} \right) \end{cases}.$$

Từ đó ta được phương trình:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0. \tag{1.7}$$

Với $u = \sum u_i$ ta được đẳng thức sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1.8}$$

Đẳng thức trên được gọi là *phương trình Laplace*.

Theo cách xây dựng trên, Laplace không cho ta công thức tường minh về lực, mà cho ta công thức đối với trường thế năng u bằng cách thay thế các phép toán vào phương trình vi phân. Ta có thể coi phương trình vi phân mô tả tương tác của trường thế u. Laplace cho chúng ta ý tưởng dùng phương trình vi phân để mô tả trường thế u, các phương trình tác động khắp nơi ngoài các điểm mà tại đó tập trung khối lượng hấp dẫn (tại các điểm $x = x_i, y = y_i, z = z_i$ ta không tính đạo hàm theo các công thức trên).